UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Matemáticas para no perder el control

Eduardo Cerpa
Departamento de Matemática
UTFSM

Título real
Teoría Matemática del Control

- **¿Qué es la Teoría de Control?**

  Es una rama interdisciplinaria de la Ingeniería y la Matemática que estudia la conducta de sistemas dinámicos y cómo esta puede ser modificada.

- **¿Para qué sirve?**

  Para diseñar sistemas que funcionen mejor, de manera **automática** u **óptima** en algún sentido… (y para estudiar Matemática)

- **¿Qué aporta la Matemática a la Teoría de Control?**

  Muchos sistemas dinámicos pueden estudiarse gracias a modelos matemáticos. El diseño buscado se basa también en Matemática.

Control Automático
Llenado de un recipiente

Queremos llenar un recipiente con agua

El sistema se describe por el nivel de agua en el recipiente. Queremos llegar a cierto nivel.

¡Abriendo y cerrando la llave lo logramos!

Problemas:

1. No es cómodo por lo que nos gustaría hacerlo de forma automática.

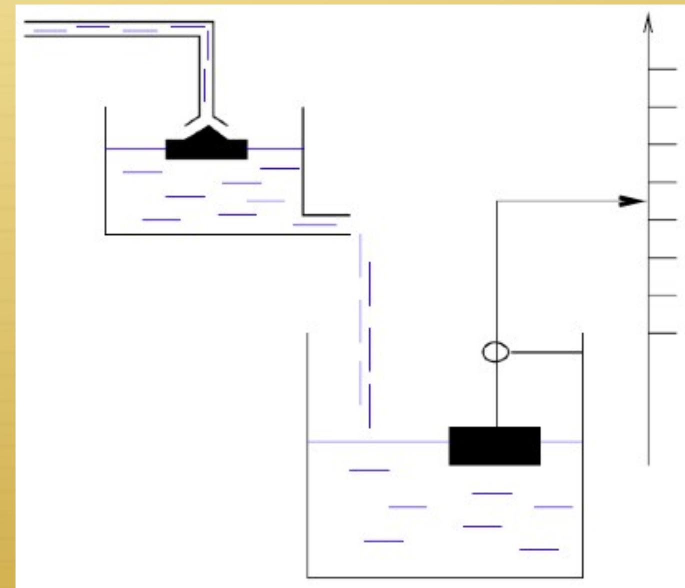
2. Si me distraigo (llamada telefónica), el recipiente se desbordará.

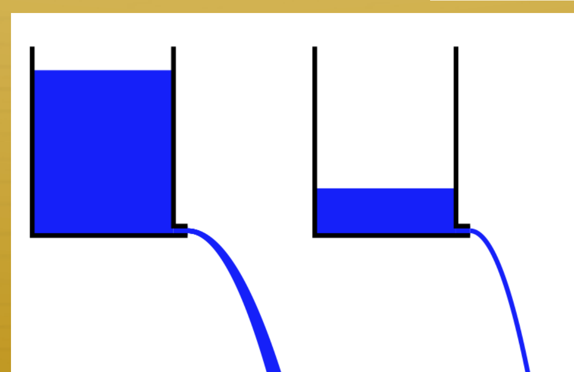
Control Automático
Llenado de un recipiente

Soluciones: hay varios diseños para hacer el llenado de forma **automática**, dependiendo del contexto.

Primer Diseño de Control
El reloj de agua

Tarea: medir el tiempo, crear un reloj





Dificultad: el flujo de agua depende del nivel

Control Óptimo
¿Tiempo mínimo / camino más corto?

Problema: Diseñar una canaleta que una los puntos A y B de forma tal que al caer una bolita desde A, esta llegue en el menor tiempo posible a B.

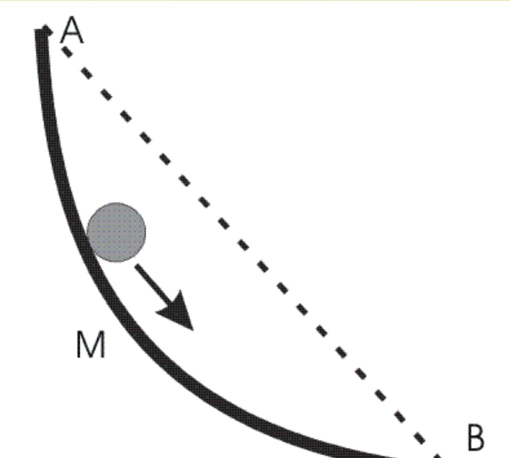
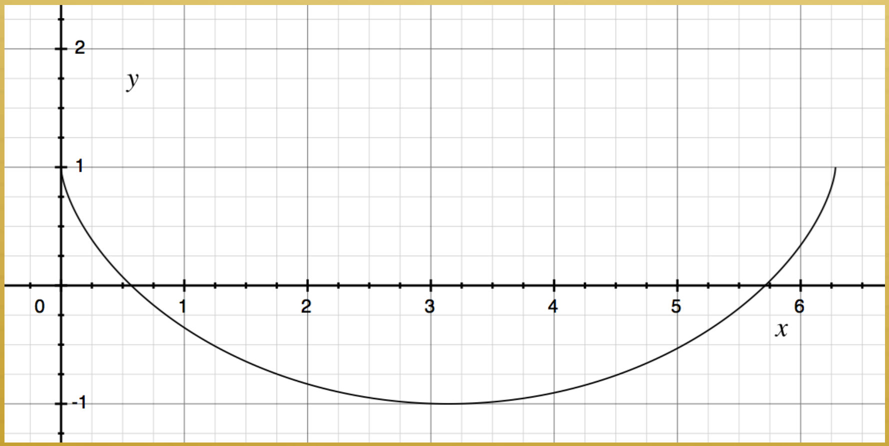


Fig.1



Solución: un arco de cicloide

x(t) = t - sin(t) ; y(t) = cos(t), parámetro t

Control Óptimo
¿Tiempo mínimo /camino más corto?

Este es un problema bonito e interesante desde un punto de vista físico y matemático.

No es tan difícil ver que esta solución es mejor que la línea recta o un arco de circunferencia pero demostrar que es **la mejor** es duro.

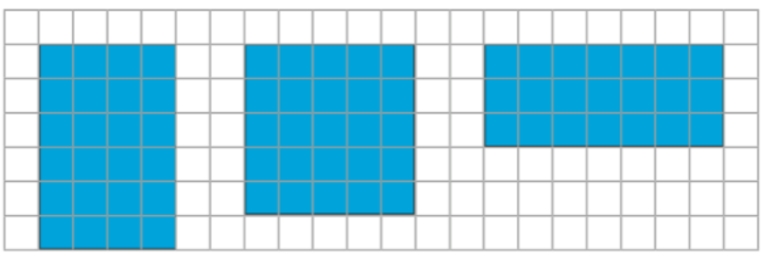
¡Tiene además aplicaciones para **perder el control** !

Diseño Óptimo
Rectángulo de área máxima a perímetro fijo

Problema resuelto matemáticamente por Euclides el 300 A.C.

El cuadrado es lo máximo

Imaginemos que te heredan un terreno rectangular en Chiloé y lo puedes cerrar con un alambre de 200 metros. ¿De qué forma lo eligirías? A continuación mostramos modelos geométricos de terrenos que se pueden encerrar con un cable de 200 *m*. Cada celda de la cuadrícula representa un cuadrado de lado 10 *m*.



Alguien podría decir que da lo mismo, que los terrenos son iguales, pero si nos fijamos con atención hay algunos que encierran más celdas que otros, el primero envuelve 24, el segundo 25 celdas y el tercero sólo 21. Te invitamos a que construyas muchos rectángulos que cumplan la condición de ser encerrados por un cable de 200 *m*, y luego sigas leyendo, pensando en la respuesta a la pregunta, ¿cuál encierra mayor área?

Perímetro fijo en 200 metros.

Debemos elegir el ancho y alto del rectángulo

Escribamos los lados como **(50+A)** y **(50+B)**

Como el perímetro debe ser 200, tenemos

$$\mathbf{200 + 2A + 2B = 200}$$

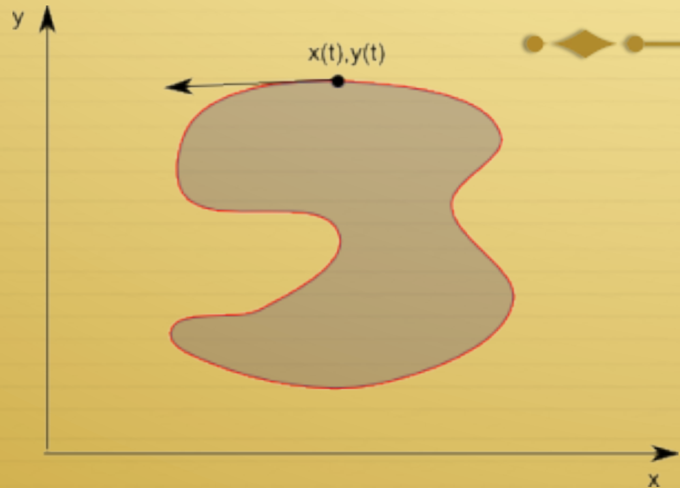
Luego $\mathbf{B = -A}$

$$\textbf{Area} = (50+A)(50+B)=(50+A)(50-A)$$
$$= 50^2 - A^2$$

Esta área es máxima cuando **A=0**, es decir cuando los dos lados son iguales a 50.

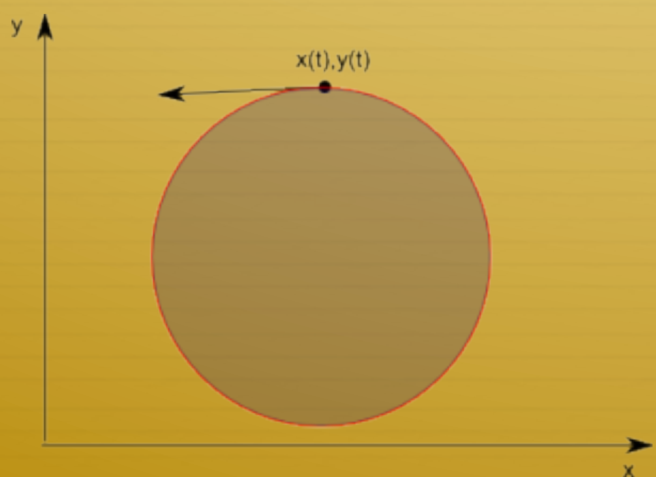
¡UN CUADRADO!

Diseño Óptimo
Figura de área máxima a perímetro fijo



Mismo problema que antes pero ahora se puede elegir cualquier figura a perímetro fijo.

Leyenda de la **Reina Dido** (814 A. C.)



Problema mucho más complicado que antes y requiere del **Cálculo de Variaciones**

Solución: ¡UN CIRCULO!

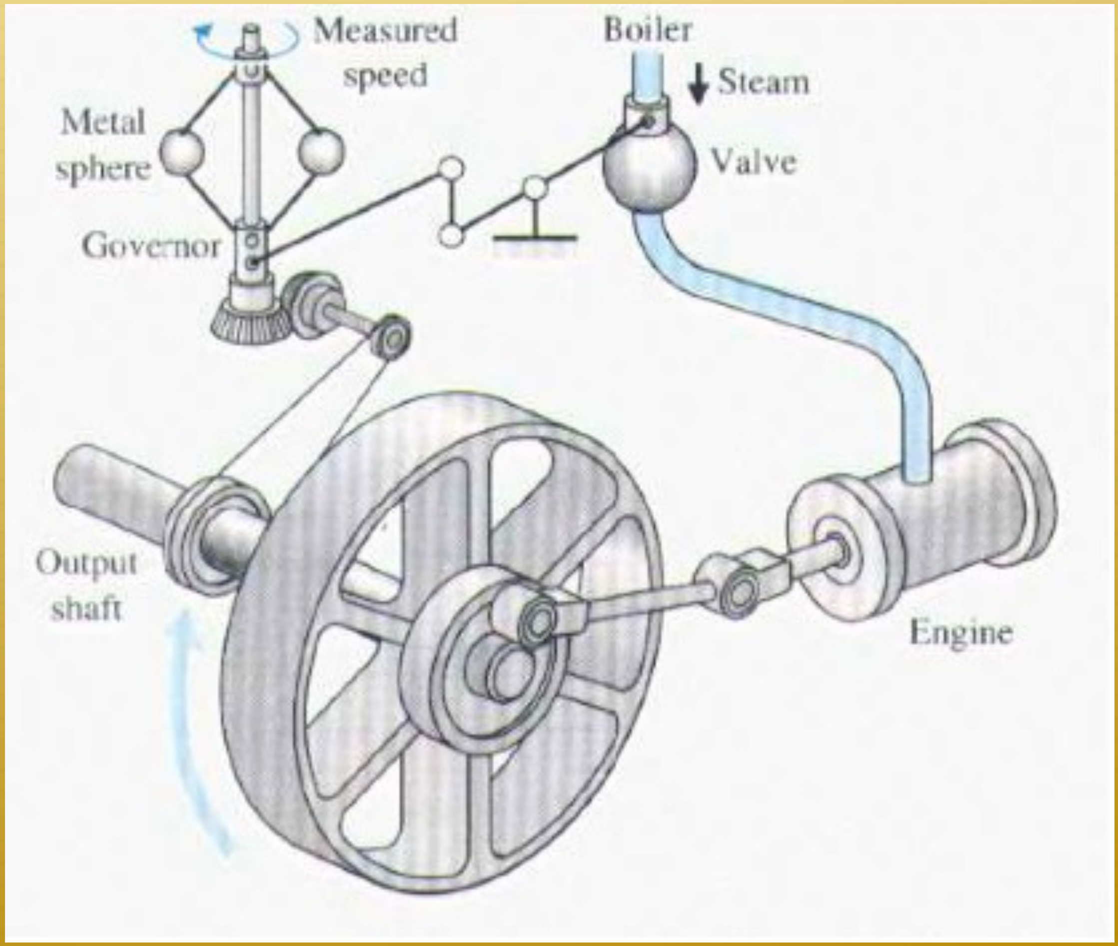
La prueba matemática recién en el siglo IXX.

Regulador de Watt, 1788
Primer diseño con matemática moderna

En la Revolución Industrial, las **máquinas a vapor** fueron fundamentales.

Surge la necesidad de **regular** velocidades de rotación.

Aparece el **regulador de Watt,** estudiado por Maxwell en 1868.



Regulador de Watt, 1788
Primer diseño con matemática moderna

En la Revolución Industrial, las **máquinas a vapor** fueron fundamentales.

Surge la necesidad de **regular** velocidades de rotación.

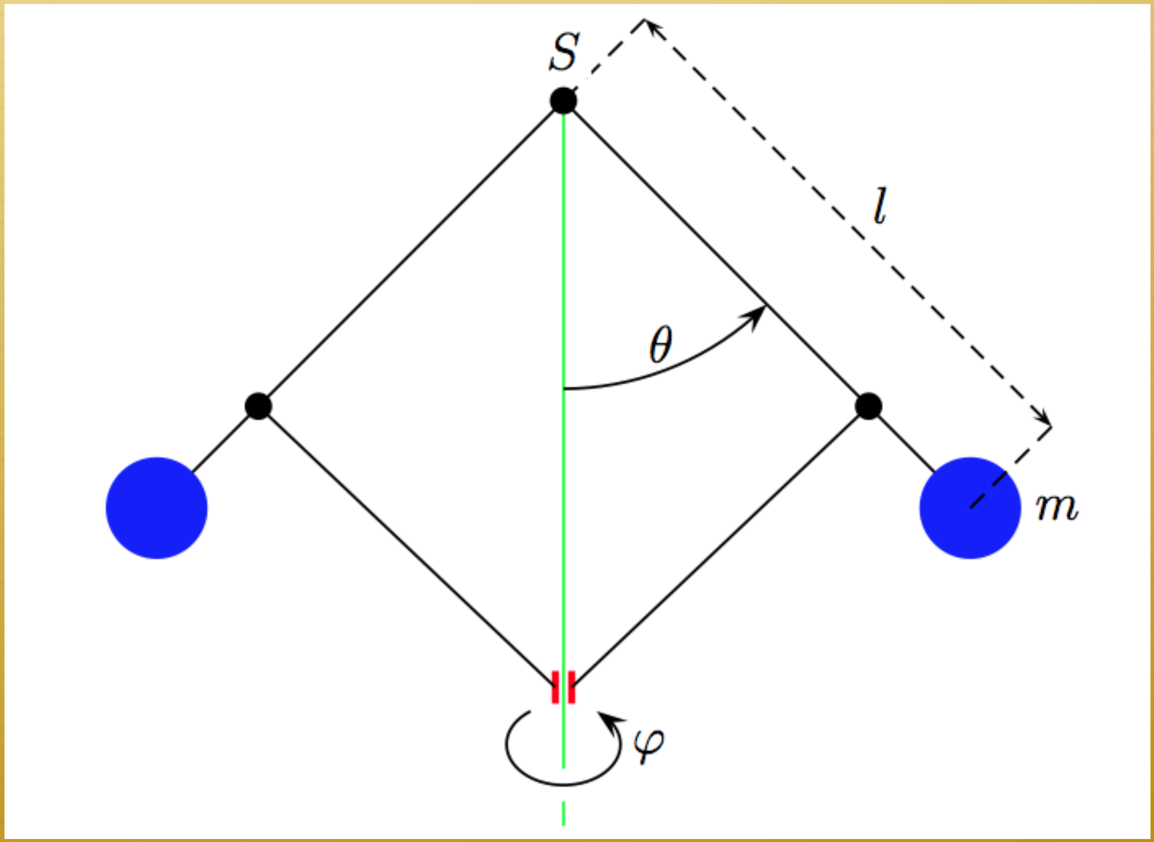
Aparece el **regulador de Watt,** estudiado por Maxwell en 1868.

Regulador de Watt, 1788
Primer diseño con matemática moderna

En la Revolución Industrial, las **máquinas a vapor** fueron fundamentales.

Surge la necesidad de **regular** velocidades de rotación.

Aparece el **regulador de Watt,** estudiado por Maxwell en 1868.



Regulador de Watt, 1788
Primer diseño con matemática moderna

En la Revolución Industrial, las **máquinas a vapor** fueron fundamentales.

Surge la necesidad de **regular** velocidades de rotación.

Aparece el **regulador de Watt,** estudiado por Maxwell en 1868.

$$\ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{\ell}\sin(\theta) - \frac{C}{2m\ell^2}\dot{\theta}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\Gamma_r}{J} + \frac{\Gamma_0}{J} - \frac{k}{J}(1 - \cos(\theta))$$

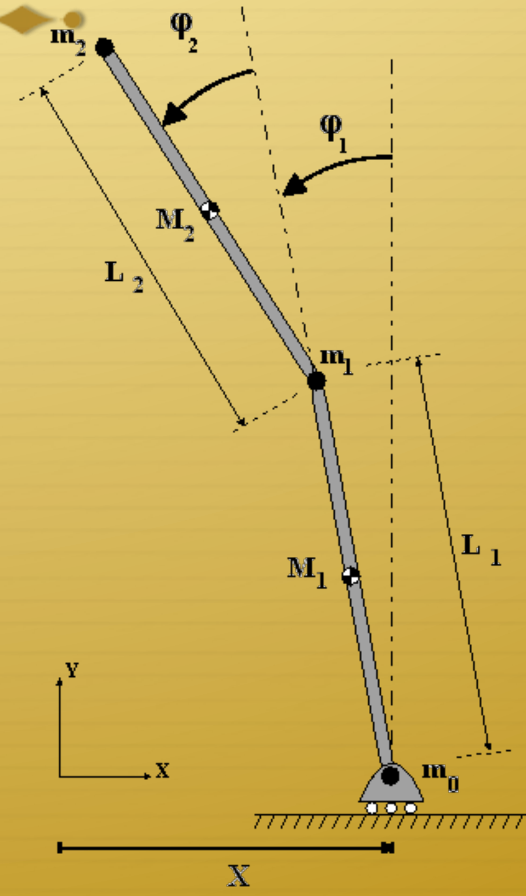
Un análisis matemático nos dice cómo elegir Γ_0 y k para que el regulador gire a una velocidad angular ω dada.

Péndulo Doble

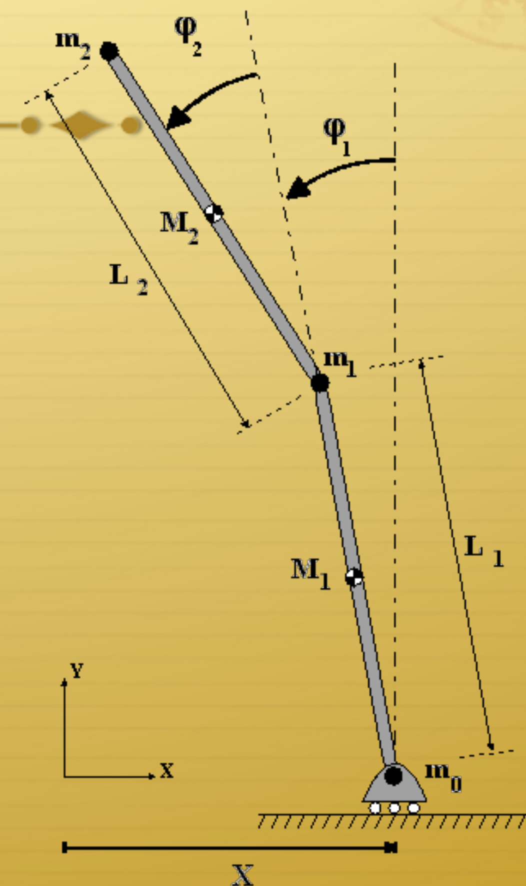
El **péndulo doble** que vimos en el stand, se puede estudiar matemáticamente.

Se describe con **variables**. Algunos **parámetros** no varían, como el largo de cada brazo.

Las variables importantes son los **ángulos** y la **velocidad** con que estos varían.



Péndulo Doble



La física nos lleva a relaciones entre las variables, en este caso, una **ecuación diferencial**.

Esta descripción nos permite estudiar el comportamiento de este sistema y resolver problemas relacionados con él. Como en el video.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1+m_2)\sin\theta_1 - m_2 g\sin(\theta_1-2\theta_2) - 2\sin(\theta_1-\theta_2)m_2(\dot{\theta}_2^2 l_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$

Título real
Teoría Matemática del Control

- **¿Qué es la Teoría de Control?**

  Es una rama interdisciplinaria de la Ingeniería y la Matemática que estudia la conducta de sistemas dinámicos y cómo esta puede ser modificada.

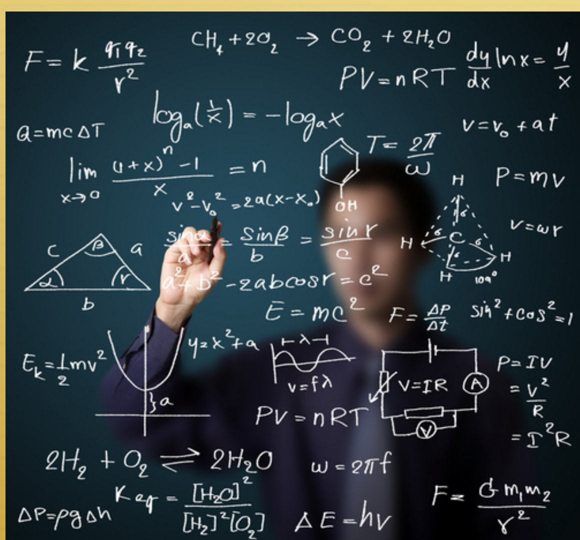
- **¿Para qué sirve?**

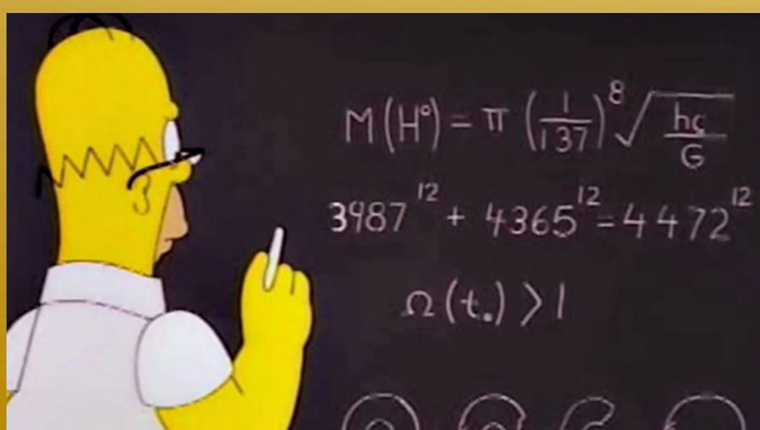
  Para diseñar sistemas que funcionen mejor, de manera **automática** u **óptima** en algún sentido… (y para estudiar Matemática)

- **¿Qué aporta la Matemática a la Teoría de Control?**

  Muchos sistemas dinámicos pueden estudiarse gracias a modelos matemáticos. El diseño buscado se basa también en Matemática.

Chile necesita Ingenieros/Científicos/Matemáticos





Muchas gracias